Introduction à l'Économie

Renaud Bourlès Nicolas Clootens

Centrale Méditerranée
Aix-Marseille School of Economics

2024-2025

Risque et temps

Choix et temps

- Dans de nombreux cas : investissement, éducation, épargne,...
- les décisions économiques impliquent des coûts et des bénéfices
- qui surviennent à différentes périodes.

- Pour analyser ces choix, il est nécessaire de pouvoir comparer
- coûts et bénéfices, i.e. de pouvoir comparer différentes périodes entre elles.

- Les choix optimaux d'épargne ou d'éducation dépendront alors
- d'un arbitrage entre les coûts présents
  - frais d'inscription, coûts d'opportunité
- et les bénéfices futurs
  - emploi, salaire, consommation future avec intérêts
- qu'il faut évaluer au moment du choix.
- (Le raisonnement complémentaire peut être tenu pour l'emprunt)

Valeur du futur et taux d'intérêt

- La plupart des agents économiques ont une préférence pour le présent :
- toutes choses égales par ailleurs, ils préfèrent une satisfaction immédiate
- à une satisfaction différée.

- Ainsi, il semblerait que le présent ait une valeur plus élevée que le futur

- Mais comment mesurer cette différence de valeur?

- Le taux d'intérêt entre deux dates t et $t + 1$ représente
  - le supplément de revenu qu'il est possible d'obtenir en $t + 1$
  - en renonçant à utiliser ce revenu en t.

- Il reflète donc la valeur d'un 1€ de t en $t + 1$

Capitalisation et actualisation : rappel de comptabilité

- Ainsi en supposant le taux d'intérêt, noté r, constant entre deux périodes
  - 1 euro aujourd'hui vaudra $(1 + r)$ euros après une période,
  - $(1 + r)^2$ euros après deux périodes
    - l'individu "renonce" à ses intérêts de la première période
  - et plus généralement $(1 + r)^n$ euros après n périodes.

- On obtient ainsi la valeur future d'un euro présent, et on parle de capitalisation

- L'opération inverse : l'actualisation et donne la valeur présente d'un euro futur.
- Si le taux d'intérêt entre deux périodes est r, un euro dans une période vaut
- $\frac{1}{1+r} \equiv \delta$ euro aujourd'hui (δ est appelé facteur d'actualisation)
- et un euro dans n périodes vaut δ^n (quand r est constant)

- Si $r > 0$, $\delta < 1$ reflétant la préférence pour le présent

Choix intertemporels

- Cette notion d'actualisation peut être étendue aux choix intertemporels
- via la notion d'actualisation d'utilité (ou de satisfaction).

- Si le facteur d'actualisation n'est pas nécessairement celui calculé au dessus
  - et dépend du degré de préférence pour le présent pour le choix considéré
- l'utilité future sera actualisée pour être rendue comparable à l'utilité présente.

- Un agent devant opérer un choix conduisant à des alternatives
- a_1 en période 1 et a_2 en période 2 cherchera donc à maximiser :

$$u(a_1) + \delta u(a_2)$$

- avec δ le facteur d'actualisation

Investissement : valeur actuelle nette

- L'actualisation financière permet de mettre en regard
- les coûts présents et les bénéfices futurs
- dans le cadre d'investissements ou de projets à long terme.

- La notion de valeur actuelle nette (VAN), ou net present value (NPV)
- généralise l'analyse coût-bénéfice dans un cadre intertemporel :
- en notant C_t et B_t les coûts et bénéfices d'un projet au temps t
- sa valeur actuelle nette (à r constant) s'écrira :

$$VAN = \sum_{t=0}^{\infty} \frac{B_t - C_t}{(1+r)^t}$$

- La VAN est utile pour déterminer l'opportunité d'un investissement
- et pour comparer divers projets entre eux.

Valorisation financière : l'actualisation des flux

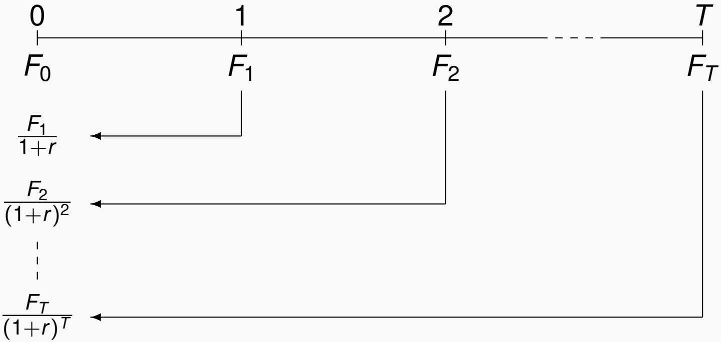
- La notion de VAN est au centre de la valorisation financière :
- la valeur d'un produit (ou titre) financier, c'est-à-dire
  - d'un contrat spécifiant une séquence de flux financiers
- sera la sommes actualisée de ses flux.

- Selon les produits, les flux financiers pourront dépendre d'événements
- aléatoires et seront donc probabilisés pour calculer la valeur du titre.

- Ce principe s'applique aussi bien
  - en assurance (on parlera de valeur actuarielle)
  - en finance de marché, pour valoriser un titre s'échangeant sur les marchés
  - en finance d'entreprise, pour valoriser une entreprise ou un projet en vue d'une transaction ou d'un investissement

L'actualisation des flux : un exemple

- Un projet, une entreprise, ou un titre générant des flux financiers (espérés)
- F_0€, F_1€,..., F_T€ aux années 0, 1,..., T sera valorisé(e) (à r constant)



- $F_0 + \frac{F_1}{1+r} + \frac{F_2}{(1+r)^2} + \cdots \frac{F_T}{(1+r)^T}$€
- Cette méthode appelée DCF ("discounted cash flow") est utilisée
  - comme base aux discussions de fusion-acquisition ou
  - de financement de projet (ENR, infrastructure,...)

Centrale Méditerranée

À quel taux actualiser?

- Si le principe de la méthode est assez simple,
- la détermination de ses intrants est souvent complexe.

- En finance d'entreprise, la détermination des flux futurs
- repose sur la modélisation de l'évolution des profits générés
- par l'entreprise ou le projet (business plan, coût/bénéfice d'exploitation,...).

- En finance de marché, la détermination des probabilités de ces flux
- repose sur une modélisation stochastique de la variation du prix des titres.

- Dans les deux cas, la détermination du taux r sur la base duquel
- les flux sont actualisés est primordiale.

À quel taux actualiser? Le cas de la finance d'entreprise.

- En finance d'entreprise, la taux généralement utilisé pour l'actualisation
- reflète le coût du capital pour l'entreprise, i.e. le coût auquel elle se finance

- On retrouve ici l'analogie entre capitalisation et actualisation.

- Pour prendre en compte les diverses sources de financement des entreprises
- on utilise généralement un coût du capital moyen pondéré (ou WACC)
- prenant en compte à la fois le coût de la dette
  - i.e. le taux d'intérêt sur les emprunts
- et le coût des fonds propres
  - i.e. le rendement attendu par les actionnaires
  - calculé à l'aide du Modèle d'Evaluation des Actifs Financiers (étudié en 2A)
- pondérés par leur poids respectifs dans les ressources de l'entreprise.

$\rightarrow$ le taux d'actualisation prend en compte le risque propre à l'entreprise

À quel taux actualiser? Le cas de la finance de marché.

- Lorsqu'on valorise un titre échangé sur les marchés financiers,
- le risque, la partie aléatoire, est pris en compte via la probabilisation des flux.
- L'actualisation doit donc se faire au taux sans risque.

- Ce taux est approximé par le taux d'intérêt demandé aux États
- les plus solvables, ceux dont le risque de défaut est le plus faible.

- On utilise pour cela les obligations émises par ces États sur le marché.

- Une obligation est un titre adossé à un emprunt
  - émis par une entreprise ou un gouvernement
- pouvant être échangés sur les marchés financiers, et
- versant à son détenteur des coupons (les intérêts) à échéances fixes
- et remboursant le nominal (ou valeur faciale) à échéance.

Obligations zéro-coupon et taux sans risque

- Par exemple, une obligation de valeur faciale N et d'échéance T
- versant des coupons annuels constant c générera les flux suivants

0	1	2	3	...	T
	c	c	c		$N + c$

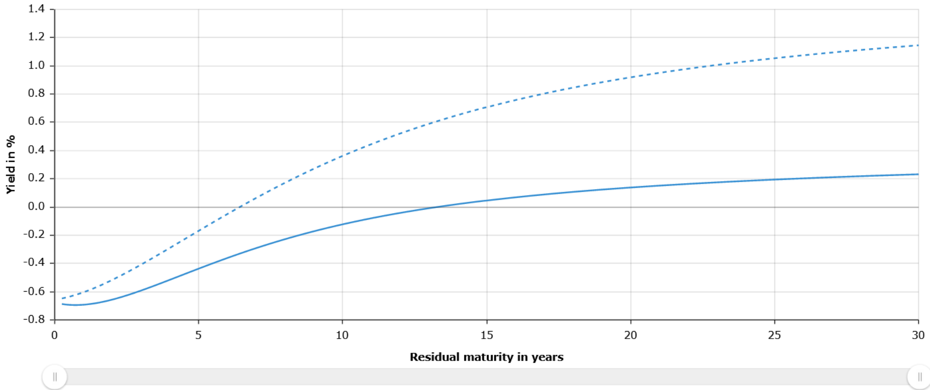
- Les montants c et N étant fixées dès le début du contrat,
- le seul risque d'une obligation réside dans le défaut de l'emprunteur.

- En supposant que celui-ci est nul pour les États les plus solvables,
- les obligations zéro-coupon ($c = 0$) d'échéance T qu'ils émettent valent
- $\frac{N}{(1+r(0,T))^T}$ où $r(0, T)$ est le taux annuel sans risque entre 0 et T

- On peut donc retrouver les taux sans risque à partir du prix de ces obligations

Courbe des taux

- En utilisant le prix des obligations émises à diverses échéances, on obtient
- les divers taux nécessaires à l'actualisation, résumé dans la courbe des taux



Dashed lines indicate the spot rate based on all government bonds; solid lines on AAA-rated bonds only.

Courbe des taux de la zone Euro (Source : BCE)

Courbe des taux : remarques

On remarque ici :

1. Que les taux sont plus élevés pour les obligations d'état non notées AAA.
   - Du fait du plus grand risque de défaut perçu,
   - les investisseurs demandent un rendement plus élevé sur ces titres.
   - On parle de spread de taux.
2. Que certains taux sont négatifs.
   - Du fait de la forte demande pour les obligations de court-terme,
   - liée à des contraintes réglementaires (pour les banques ou les assureurs)
   - ou à des choix de gestion de portefeuille (que non étudierons ci-après)
   - leur prix a baissé jusqu'à correspondre à des taux d'intérêt négatifs.

Valorisation des actifs financiers : l'arbitrage

- On a supposé jusqu'ici que la valeur d'un actif financier était égale
- à la valeur actualisée des flux qu'il génère.

- Ceci est dû à une hypothèse centrale de la finance :

  l'absence d'opportunité d'arbitrage

Definition

On appelle opportunité d'arbitrage, l'existence d'une stratégie (d'achat et de vente de titres) permettant à coup sûr (i.e. sans risque) de réaliser un gain immédiat.

- L'intuition est que si il existait de telles opportunités,
- elles seraient immédiatement saisies et disparaîtraient.

  (un professeur de finance ne ramassera jamais un billet de 100€ par terre)

Valorisation des actifs financiers : loi du prix unique

- Ainsi, deux actifs (ou stratégies) conduisant à la même séquence
- de flux financiers doivent avoir le même prix (ou le même coût).

- Dans le cas contraire, en vendant l'un et achetant l'autre, un investisseur
- pourrait réaliser un gain immédiat à coup sûr.

- Comme on peut reproduire n'importe quelle séquence de flux F_1, F_2,..., F_T
- en achetant des zéro-coupon sans risque d'échéance 1, 2,..., T,
- le prix d'un actif générant ces flux doit être égal à

$$p(0,1).F_1 + p(0,2).F_2 + ... + p(0,T).F_T$$

- où $p(0,t)$ est le prix du zéro-coupon d'échéance t et de nominal 1
- soit d'après les définitions ci-dessous, la somme actualisé des flux :

$$\frac{F_1}{1+r(0,1)} + \frac{F_1}{(1+r(0,2))^2} + ... + \frac{F_T}{(1+r(0,T))^T}$$

Les marchés financiers : risque et temps

- La plupart des décisions impliquant un décalage temporelle (investissement, éducation, emprunt,...)
- impliquent également du risque, de l'incertitude (quant au rendement de l'investissement, ou du diplôme par exemple).

- Comprendre (ou modéliser) ces décisions nécessite donc
- d'analyser le comportement des acteurs en situation d'incertitude.

- Ceci permet également de mieux comprendre le fonctionnement
- des marchés financiers (au sens large), dont le rôle est à la fois

1. de financer les investissements (via les produits discutés précédemment)
2. d'offrir des couvertures face au risque
   - de taux de change, de prix des matières premières,...

Centrale Méditerranée

Préférences et risque

- L'existence d'un risque, d'une partie d'aléatoire
- dans les conséquences d'un choix, nous amène à devoir
- formuler les préférences des agents sur des variables aléatoires
- appelées loteries (qui sont les alternatives du choix).

Definition

Une loterie est une variable aléatoire réelle sur un espace probabilisé décrivant les résultats/réalisations possibles du risque.

- La représentation sous forme de fonction d'utilité sur ces loteries
- peut alors être simplifiée en imposant des conditions supplémentaires
- sur les préférences (i.e. la relation d'ordre sur les loteries)

Le critère d'espérance d'utilité

- En effet, si en plus d'être

1. complètes : $\forall$ loteries L, M: $L \prec M$, $L \sim M$ ou $L \succ M$, et
2. transitives : si $L \preceq M$ et $M \preceq N$, alors $L \preceq N$

- les préférences sur les loteries sont (conditions nécessaires et suffisantes)

3. continues : si $L \preceq M \preceq N$, alors $\exists p \in [0, 1] : pL + (1 - p)N \sim M$, et
4. indépendantes : si $L \prec M$ alors $\forall N$, $\forall p \in (0, 1]$:
$$pL + (1 - p)N \prec pM + (1 - p)N$$

- il existe une fonction $u(\cdot)$ continue (de l'espace des résultats vers $\mathbb{R}$) telle que :
$$L \prec M \Leftrightarrow \mathbb{E}(u(L)) < \mathbb{E}(u(M))$$

- On peut alors définir une fonction d'utilité sur les résultats
- et appliquer le critère de l'espérance pour représenter les préférences.
- (comme précédemment cette représentation n'est pas unique)

Le paradoxe de Saint-Pétersbourg

- On voit ici que si $u(\cdot)$ est linéaire, l'agent économique ne base sa décision que
- sur l'espérance des résultats (et non sur leur distribution).

- Cette hypothèse a toutefois été réfutée dès 1713 par Bernouilli
- via l'expérience (de pensée) suivante :

- Imaginons un jeu de pile ou face, dans lequel je m'engage à vous verser
- 2^{n-1}€ si face apparaît pour la première fois au $n^{\text{ième}}$ lancer.

- L'espérance de gain est infinie : $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n 2^{n-1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2}$
- mais personne ne semble prêt à payer autant pour y participer.
- Ainsi dans ce cas : $\mathbb{E}(u(L)) < u(\mathbb{E}(L))$

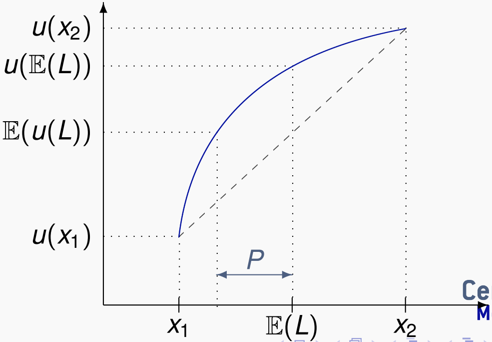
Aversion au risque et prime de risque

- On retrouve ici la définition de la concavité
  - l'image de la moyenne est supérieure à la moyenne des images
- et on parlera d'aversion au risque.

- Lorsque $u(\cdot)$ est concave, l'agent est prêt à payer pour faire disparaître l'aléa :
$$\text{si } \mathbb{E}(u(L)) < u(\mathbb{E}(L)), \exists\, P \in \mathbb{R}^+ : \mathbb{E}(u(L)) = u(\mathbb{E}(L) - P)$$
- on appellera P la prime de risque

Par exemple lorsque L prend deux valeurs x_1 et x_2 avec équiprobabilité :

(Quand l'espace des résultats est la richesse ou le revenu, on peut raisonnablement supposer la fonction d'utilité croissante.)



Degré d'aversion au risque et prime de risque

- Pour un risque donné, la prime de risque mesure alors l'aversion au risque :
- + un agent est averse au risque, + il est prêt à payer pour le faire disparaître.

- Le degré d'aversion au risque est ainsi lié au degré de concavité de $u(\cdot)$.

- Pour le voir, considérons le cas d'un agent de richesse R,
- soumis à un risque d'espérance nulle, dont on fera varier la taille.

- Plus précisément, on suppose que l'agent fait face à la loterie :
$$L = R + k\tilde{\varepsilon} \text{ avec } k \in \mathbb{R}^+,\ \mathbb{E}(\tilde{\varepsilon}) = 0 \text{ et } \mathrm{Var}(\tilde{\varepsilon}) = \sigma^2$$
- et on étudie l'effet de k sur la prime de risque $P(k)$ correspondante :

$$\mathbb{E}(u(R + k\tilde{\varepsilon})) = u(R - P(k)) \qquad (*)$$

Approximation de la prime de risque

- Pour de petites valeurs de k, au voisinage de 0, on a :
$$P(k) \sim P(0) + kP'(0) + \frac{k^2}{2}P''(0)$$
- Or, par définition, $P(0) = 0$ et en différenciant (*) par rapport à k on obtient :
$$\mathbb{E}(\tilde{\varepsilon}u'(R + k\tilde{\varepsilon})) = -P'(k)u'(R - P(k))$$
- soit en $k = 0$: $\mathbb{E}(\tilde{\varepsilon})u'(R) = -P'(0)u'(R)$ donnant $P'(0) = 0$ puisque $\mathbb{E}(\tilde{\varepsilon}) = 0$
- En différenciant de nouveau (*) on obtient finalement
$$\mathbb{E}(\tilde{\varepsilon}^2u''(R + k\tilde{\varepsilon})) = (P'(k))^2u''(R - P(k)) - P''(k)u'(R - P(k))$$
- Soit en $k = 0$: $P''(0) = \sigma^2\frac{-u''(R)}{u'(R)}$

L'indice d'aversion au risque

- Ainsi en notant que $k^2\sigma^2 = \text{Var}(L)$, on obtient que

Proposition

Pour de petits risques, la prime de risque peut-être approximé par

$$P(L) \sim \frac{Var(L)}{2} \frac{-u''(R)}{u'(R)}$$

i.e. le produit de (1) la moitié de la variance du risque et (2) d'un indice du degré de concavité locale de la fonction d'utilité, appelé indice d'aversion au risque.

- L'indice d'aversion au risque noté $A(R) \equiv \frac{-u''(R)}{u'(R)}$ est alors
- indépendant du risque considéré et ne dépend que du niveau de richesse.

- Il peut être croissant, décroissant ou constant dans ce niveau de richesse,
- en fonction des préférences de l'agent.

Choix simple de portefeuille

- Cette modélisation des choix en univers risqué,
- nous permet de comprendre les choix d'investissement des agents
- dans un modèle simple où ils doivent allouer leur richesse R entre
  - un actif sans risque, fournissant un rendement certain r, et
  - un actif risqué, dont le rendement $\tilde{x}$ est aléatoire.

- Investir un montant α dans l'actif risqué donne alors
- à la fin de la période d'investissement, une richesse égale à :

$$(R - \alpha)(1 + r) + \alpha(1 + \tilde{x})$$

- qu'on peut réécrire comme

$$R(1 + r) + \alpha(\tilde{x} - r) = R_1 + \alpha\tilde{y}$$

  - où R_1 est la valeur future de R (obtenue en plaçant R dans l'actif sans risque)
  - et $\tilde{y}$ représente le rendement excédentaire de l'actif risqué (aléatoire)

Centrale Méditerranée

Allocation optimale et rendements

- D'après ce qu'on a vu précédemment, le choix optimal revient alors
- à choisir la valeur d'α qui maximise l'espérance d'utilité :

$$V(\alpha) = \mathbb{E}(u(R_1 + \alpha\tilde{y}))$$

- avec $V'(\alpha) = \mathbb{E}(\tilde{y}u'(R_1 + \alpha\tilde{y}))$ et $V''(\alpha) = \mathbb{E}(\tilde{y}^2 u''(R_1 + \alpha\tilde{y}))$

- Ainsi α sera strictement positif si et seulement si $V'(0) > 0$
- lorsque l'agent considéré est averse au risque (alors $u''(\cdot) < 0 \Rightarrow V''(\alpha) < 0$).

- L'utilité croissante étant croissante dans la richesse,
- cela ne sera possible que si $\mathbb{E}(\tilde{y}) > 0$.

- Ainsi, un agent averse au risque ne souhaitera investir dans un actif risqué
- que si son espérance de rendement > rendement de l'actif sans risque.

Allocation optimale et petits risques

- Alors, comme précédemment, une approximation pour de petits risques
- permet de comprendre certains des mécanismes en jeu.

- En considérant $\tilde{y} = k + \tilde{\varepsilon}$ avec $k \in \mathbb{R}^+$ et $\mathbb{E}(\varepsilon) = 0$,
- l'allocation optimale en fonction de k est donnée par $\alpha^*(k)$ tel que :

$$\mathbb{E}\left[(k+\tilde{\varepsilon})u'\left(R_1 + \alpha^*(k)(k+\tilde{\varepsilon})\right)\right] = 0 \qquad (**)$$

- et au voisinage de $k = 0$: $\alpha^*(k) \sim \alpha^*(0) + k\alpha^{*\prime}(0)$

- Or, d'après le résultat précédent, $\alpha^*(0) = 0$ (on a alors $\mathbb{E}(\tilde{y}) = \mathbb{E}(\tilde{\varepsilon}) = 0$).
- Ainsi en différenciant (**) par rapport à k et en évaluant en $k = 0$, on obtient :

$$u'(R_1) + \alpha^{*\prime}(0)\mathbb{E}(\tilde{\varepsilon}^2)u''(R_1) = 0 \Rightarrow \alpha^{*\prime}(0) = \frac{1}{\mathrm{Var}(\tilde{\varepsilon})}\frac{-u'(R_1)}{u''(R_1)}$$

Allocation optimale, rendement, risque et préférences

- Ceci nous permet d'approximer l'investissement optimal par

$$\alpha^*(k) \sim \frac{k}{\mathrm{Var}(\tilde{\epsilon})} \frac{-u'(R_1)}{u''(R_1)} = \frac{\mathbb{E}(\tilde{y})}{\mathrm{Var}(\tilde{y})} \frac{1}{A(R_1)}$$

- L'investissement optimal dans l'actif risqué est alors :

1. proportionnel à l'espérance de son rendement (excédentaire), et

2. inversement proportionnel

- à son risque (mesuré par la variance de son rendement), et
- à l'aversion au risque de l'investisseur